613《高等代数》

一、考查目标

“高等代数”是数学类专业的基础课，它是研究线性系统和线性结构的一门数学学科，是几乎所有数学后续课程的先修课程, 并且在自然科学的各个分支中有广泛而深刻的应用。该课程考查考生对高等代数的基本概念、主要理论、重要方法的掌握程度，同时考查考生的数学抽象思维、逻辑推理及运算求解能力，提高分析问题、解决问题能力。

二、试卷结构

1、题型结构

填空题（45 分）、解答题（105 分），共计 150 分。

2、 内容结构

考试内容主要包括多项式理论、行列式、线性方程组、矩阵理论、二次型、线性空间、线性变换、λ-矩阵、欧氏空间等九个部分，其中每个部分分值比例约在 10%—20%。

三、考试内容和要求

（一）多项式理论： 多项式的整除，最大公因式，多项式的互素，不可约多项式与因式分解，重因式重根的判别，多项式函数与多项式的根。

重点掌握：重要定理的证明，如多项式的整除性质，不可约多项式的性质, 整系数多项式的因式分解定理等。运用多项式理论证明有关问题，如与多项式的互素和不可约多项式的性质有关问题的证明与应用以及用多项式函数方法证明有关的问题。

（二）行列式： 行列式的定义、性质和常用计算方法（如：三角形法、加边法、降阶法、递推法、按一行一列展开法、Laplace 展开法等）。

重点掌握：n 阶行列式的计算及应用。

（三）线性方程组：向量组线性相（无）关的判别。向量组极大线性无关组的性质、向量组之间秩的大小关系、矩阵的秩、Cramer 法则，线性方程组有（无）解的判别定理、齐次线性方程组有非零解条件（用系数矩阵的秩进行判别、用行列式判别、用方程个数判别）、基础解系的计算及其性质、通解的求法，非齐次线性方程组的解法和解的结构。

重点掌握：向量组线性相（无）关的判别、向量组之间秩与矩阵的秩、齐次线性方程组有非零解条件及基础解系的性质、非齐次线性方程组解的结构与其计算。

（四）矩阵理论：矩阵的运算，矩阵的初等变换与初等矩阵的关系及其应用（求解线性方程组、求逆矩阵、求向量组的秩）、矩阵的等价标准形、矩阵可逆的条件（与行列式、矩阵的秩、初等矩阵的关系）、伴随矩阵及其性质、分块矩阵、矩阵的常用分解（如：等价分解，满秩分解，实可逆阵的正交三角分解等），几种特殊矩阵的常用性质（如：对称矩阵与反对称矩阵，伴随矩阵、幂等矩阵，幂零矩阵，正交矩阵等）。

重点掌握：矩阵的逆与伴随矩阵的性质与求法，应用矩阵理论解决一些相关问题。

（五）二次型理论：化二次型为标准形和规范形，实二次型在合同变换之下的规范型以及在正交变换之下的标准型的求法、惯性定律的应用，正定、半正定矩阵的判别及应用、正定矩阵的一些重要结论及其应用。

重点掌握：正定和半正定矩阵有关的证明，实二次型在合同变换之下的规范型以及在正交变换之下的标准型的计算。

（六）线性空间：线性空间、子空间的定义及性质、求线性空间中向量组的秩、求线性（子）空间的基与维数的方法、基扩充定理，维数公式，基变换与坐标变换，生成子空间，子空间直和，一些常见的子空间（线性方程组解的解空间、矩阵空间、多项式空间、函数空间、线性变换的特征子空间和不变子空间）。

重点掌握：向量组的线性相关与线性无关的综合证明，求线性（子）空间的基与维数的方法，维数公式的证明及应用，特别是子空间直和的有关证明。

（七）线性变换：线性变换的定义与运算，线性变换与 n 阶矩阵的对应定理，矩阵的特征多项式（包括最小多项式）及其有关性质，求线性变换的矩阵和特征值以及特征向量的方法，线性无关特征向量的判别及最大个数，实对称矩阵的特征值和特征向量的性质，特征子空间，不变子空间，核与值域的定理. 线性变换（包括矩阵）可对角化的条件，Hamilton－Caylay 定理。

重点掌握：线性变换（包括矩阵）的对角化，求线性变换的矩阵和特征值以及特征向量的方法，线性变换（矩阵）的特征值以及特征向量的性质，线性变换的核与值域。

（八）λ-矩阵：λ-矩阵的初等变换，λ-矩阵的标准型，行列式因子，不变因子，初等因子，三种因子之间的关系，Jordan 标准型理论。

重点掌握：求矩阵的三种因子、Jordan 标准型。

（九）欧氏空间: 内积和欧氏空间的定义及简单性质（柯西-施瓦兹不等式，三角不等式，勾股定理等）。度量矩阵与标准正交基的求法以及性质的证明和应用，正交变换（正交矩阵）的等价条件，对称变换，求正交矩阵 T，使实对称矩阵 A 正交相似于对角矩阵。

重点掌握：欧氏空间的概念，标准正交基，Schmidt 正交化方法，正交变换和对称变换。

四、推荐书目：

1、《高等代数》（第四版）北京大学编，高等教育出版社，2013 年；

2、《高等代数》（第二版）黄廷祝等编，高等教育出版社，2016 年。

806《数学分析》

一、考查目标

1、系统、正确地理解数学分析的基本概念和基本理论，掌握解决数学分析中问题的基本思维方法和证明方法。

2、具有抽象思维能力和逻辑推理能力，掌握熟练的演算技巧，具备初步的应用能力和较强的分析问题和解决问题的综合能力。

二、试卷结构

1、题型结构

填空题（48 分）、计算题（70 分）、证明题（32 分），共计 150 分。

2、内容结构

函数极限与连续性（15%）、一元函数的微积分（40%）、多元函数的微积分（30%）、级数理论（15%）。

三、考试内容及要求

1、实数集与函数

实数：实数概念及性质；绝对值与不等式。

数集确界原理：区间与邻域；有界集与无界集；上确界与下确界，确界原理。

函数概念：函数定义；函数的表示方法；函数的四则运算；复合函数；反函数；初等函数。

具有某些特征的函数：有界函数，无界函数；单调函数，单调递增（减）函数，严格单调函数，单调函数与反函数；奇函数与偶函数；周期函数。

2、数列极限

极限概念：数列极限定义，数列的敛散性；无穷小数列。

收敛数列的性质：唯一性；有界性；保号性；保不等式性；迫敛性；四则运算；归结原则。

数列极限存在的条件：单调有界定理；柯西收敛准则。

3、函数极限

函数极限的概念：函数极限的几种形式；左、右极限。

函数极限的性质：唯一性；局部有界性；局部保号性；保不等式性；迫敛性；四则运算

函数极限存在的条件：归结原则；柯西准则。

两个重要极限： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ 。

无穷小量与无穷大量：无穷小量与阶的比较、高阶无穷小量、同阶无穷小量、等价无穷小量；无穷大量；曲线的渐近线（斜渐近线、水平渐近线与垂直渐近线）。

4、函数连续

函数连续性概念：函数的点连续性、左（右）连续性的概念及相互关系；间断点及类型；区间上的连续函数。

连续函数的性质：连续函数的局部性质，包括局部有界性、局部保号性、四则运算、复合函数的连续性；有界闭区间上连续函数的基本性质，包括有界性定理、最值定理、介值性定理、根的存在定理、一致连续性定理；反函数的连续性。

初等函数的连续性：基本初等函数的连续性；初等函数的连续性。

5、导数与微分

导数概念：导数定义、单侧导数；导函数；导数的几何意义。

求导法则：导数的四则运算；反函数导数；复合函数的导数（链式法则、对数求导法）；

基本导数法则与公式。

参变量函数的导数。

高阶导数：高阶导数定义；莱布尼茨公式。

微分：微分的概念；微分运算法则；高阶微分；微分在近似计算中的应用。

6、微分中值定理及其应用

拉格朗日中值定理和函数的单调性：罗尔定理与拉格朗日定理；单调函数。

柯西中值定理和不定式极限：柯西中值定理；不定式的极限。

泰勒公式：带有佩亚诺余项的泰勒公式；带有拉格朗日余项的泰勒公式；在近似计算上的应用。

函数的极值与最值：极值判别；最大值与最小值。

函数的凸性与拐点：凸函数与凹函数；严格凸函数与严格凹函数；拐点。

函数作图：函数性态讨论，函数作图的一般步骤。

7、实数完备性

实数完备性基本定理：闭区间套与闭区间套定理；聚点与聚点定理；有限覆盖与有限覆盖定理；确界定理；单调有界定理；柯西收敛准则；基本定理的等价性。

闭区间上连续函数整体性质：有界性定理；最大、最小值定理；介值定理；一致连续性定理。

上极限与下极限：最小聚点与下极限；最大聚点与上极限。

8、不定积分

不定积分概念与基本积分公式：原函数与不定积分；基本积分表；不定积分的线性运算法则。

换元积分法与分部积分法：第一换元法与第二换元法；分部积分法。

有理函数和可化为有理函数的不定积分：有理函数的部分分式分解方法，有理函数的积分；几类可化为有理函数的积分。

9、定积分

定积分的概念：问题的提出；定积分的定义。

牛顿—莱布尼兹公式。

可积条件：可积的必要条件；达布上（下）和；上积分与下积分；可积的充要条件；可积函数类。

定积分的性质：定积分的基本性质；积分（第一）中值定理。

微积分学基本定理•定积分计算（续）：变限积分与原函数的存在性；积分（第二）中值定理；定积分的换元积分法和分部积分法。

10、定积分的应用

微元法；平面图形面积计算；已知平行截面面积求体积；平面曲线弧长与曲率；旋转曲面的面积；定积分在物理中的某些应用，包括液体静压力、引力、功与平均功率等。

11、反常积分

反常积分概念：无穷限反常积分与收敛的定义；无界函数反常积分（瑕积分）与收敛的定义。

无穷限反常积分的性质与收敛判别：无穷限反常积分的性质；绝对收敛与条件收敛；比较法则；柯西判别法；狄利克雷判别法；阿贝尔判别法。

瑕积分的性质与收敛判别：瑕积分的性质；绝对收敛与条件收敛；比较法则；柯西判别法；狄利克雷判别法；阿贝尔判别法。

12、数项级数

级数的敛散性：数项级数的敛散性概念；级数收敛的柯西收敛准则，收敛级数的若干性

质。

正项级数：正项级数收敛性的一般判别原则；比式判别法与根式判别法；积分判别法与拉贝判别法。

一般项级数：交错级数与莱布尼兹判别法；绝对收敛级数与条件收敛级数及其性质；阿贝尔判别法与狄利克雷判别法。

13、函数列与函数项级数

一致收敛性：函数列及其一致收敛性概念与判别法；函数项级数及其一致收敛概念与判别法。

一致收敛的函数列与函数项级数的性质：连续性；可微（导）性；可积性。

14、幂级数

幂级数：幂级数的收敛半径、收敛区间与收敛域；幂级数的性质；幂级数和函数的连续性、可微性、可积性。

函数的幂级数展开：泰勒级数（麦克劳林级数）；几种常见初等函数的幂级数展开。

欧拉公式.

15、傅里叶级数

傅里叶级数：三角函数与正交函数系；傅里叶级数与傅里叶系数；以 2π 为周期函数的傅里叶级数；收敛定理；周期延拓；奇延拓与偶延拓；正弦级数与余弦级数。

以 $2l$ 为周期的函数的展开式：以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数；奇函数与偶函数的傅里叶级数。

收敛定理的证明。

16、多元函数极限与连续

平面点集与多元函数：平面点集的基本概念，包括邻域、内点、外点、界点、聚点、孤立点、开集、闭集等；平面点集的完备性定理；二元函数的定义；多元函数的定义。

二元函数的极限：二元函数极限概念；二元函数极限计算与存在性判别法；累次极限；累次极限与重极限的关系。

二元函数的连续性：二元函数连续性概念及其性质；全增量与偏增量；有界闭域上连续函数的整体性质。

17、多元函数的微分学

可微性：可微性与全微分；偏导数；可微性条件；切平面的定义与可微的几何意义，全微分应用与近似计算。

多元复合函数微分法：多元复合函数求导法则；链式法则；多元复合函数的全微分与一阶微分的形式不变性。

方向导数与梯度。

泰勒定理与极值问题：高阶偏导数；多元函数的中值定理与泰勒公式；极值问题；黑赛（Hesse）矩阵。

18、隐函数定理及其应用

隐函数：隐函数概念；隐函数存在性与可微性定理；反函数存在定理。

隐函数组：隐函数组定理；反函数组与坐标变换；雅可比（Jacobi）行列式。

隐函数（组）定理的应用：平面曲线的切线与法线；空间曲线的切线与法平面；曲面的切平面与法线。

条件极值与拉格朗日乘数法。

19、含参量积分

含参量正常积分：含参量正常积分的概念；连续性、可微性与可积性。

含参量反常积分：一致收敛性及其判别法；含参量反常积分的性质（连续性、可微性与

可积性）。

欧拉积分：Γ 函数及其性质；B 函数及其性质。

20、曲线积分

第一型曲线积分：第一型曲线积分的定义及其性质、计算。

第二型曲线积分：第二型曲线积分的定义及其性质、计算。

两类曲线积分的联系。

21、重积分

二重积分概念：平面图形的面积；二重积分的定义及其存在性；二重积分的性质。

二重积分的计算：二重积分与累次积分；换元积分法（极坐标变换与一般变换）。

格林公式；曲线积分与路径无关性。

三重积分：三重积分的概念；三重积分计算、三重积分与累次积分；三重积分换元积分法：柱坐标变换，球坐标变换与一般坐标变换。

重积分应用：曲面的面积；重心坐标；转动惯量。

22、曲面积分

第一型曲面积分：第一型曲面积分的概念与计算。

第二型曲面积分：曲面的侧；第二型曲面积分的概念与计算。

高斯公式与斯托克斯公式。

场论初步：场的概念；梯度场；散度场；旋度场。

四、推荐书目：

1、华东师范大学数学系，数学分析.第 4 版[M]，高等教育出版社，2010