2024考研数学一

试题及答案解析完整版

数学(一)试题

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

(1) 已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{\cos t}dt$ ， $g(x)=\int_0^{\sin x} e^{t^2}dt$ ，则

(A) $f(x)$ 为奇函数， $g(x)$ 为偶函数.　　(B) $f(x)$ 为偶函数， $g(x)$ 为奇函数 .

(C) $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为奇函数.　　(D) $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为偶函数.

【答案】(C)

(2) 设 $P=P(x,y,z),Q=Q(x,y,z)$ 均为连续函数，Σ 为曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}\ (x\geqslant0,y\geqslant0)$ 的上侧，则 $\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x=$

(A) $\iint_{\Sigma}\left(\frac{x}{z}P+\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　(B) $\iint_{\Sigma}\left(-\frac{x}{z}P+\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(C) $\iint_{\Sigma}\left(\frac{x}{z}P-\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　(D) $\iint_{\Sigma}\left(-\frac{x}{z}P-\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

【答案】(A)

(3) 已知幂函数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数为 $\ln(2+x)$ ，则 $\sum_{n=0}^{\infty}na_{2n}=$

(A) $-\frac{1}{6}$.　(B) $-\frac{1}{3}$.　(C) $\frac{1}{6}$.　(D) $\frac{1}{3}$.

【答案】(A)

(4) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义， $\lim_{x\to0}f(x)=0$ ，则

(A) 当 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=m$ 时， $f'(0)=m$.

(B) 当 $f'(0)=m$ 时， $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=m$.

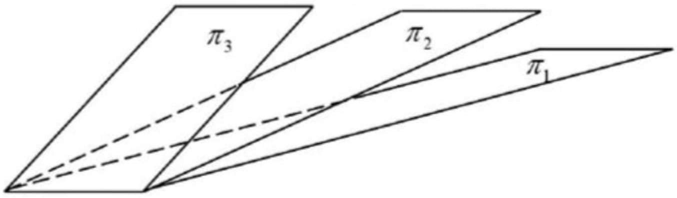
(C) 当 $\lim_{x\to0}f'(x)=m$ 时， $f'(0)=m$.

(D) 当 $f'(0)=m$ 时， $\lim_{x\to0}f'(x)=m$.

【答案】(B)

(5) 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，三张平面 $\pi_i: a_ix+b_iy+c_iz=d_i$
$(i=1,2,3)$ 位置关系如图所示，记 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_i,b_i,c_i)$ ， $\boldsymbol{\beta}_i=(a_i,b_i,c_i,d_i)$ ，

若$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}=m$，$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}=n$，则



（A）$m=1,n=2$.　　（B）$m=n=2$.

（C）$m=2$，$n=3$.　　（D）$m=n=3$.

【答案】(B)

（6）设向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\b\\a\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\\1\end{pmatrix}$，若$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$线性相关，且其中任意两个向量均线性无关，则

(A) $a=1,b\neq-1$　　(B) $a=1,b=-1$

(C) $a\neq-2,b=2$　　(D) $a=-2,b=2$

【答案】(D)

（7）设$\boldsymbol{A}$是秩为2的3阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$是满足$\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$的非零向量，若对满足$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$的任意向量$\boldsymbol{\beta}$，均有$\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{\beta}$，则

（A）$\boldsymbol{A}^3$的迹为2.　　（B）$\boldsymbol{A}^3$的迹为5.

（C）$\boldsymbol{A}^5$的迹为7.　　（D）$\boldsymbol{A}^5$的迹为9.

【答案】(A)

（8）设随机变量X与Y相互独立，X是服从$N(0,2)$的正态分布，Y是服从$N(-2,2)$的正态分布，若$P\{2X+Y<a\}=P\{X>Y\}$，则$a=$

（A）$-2-\sqrt{10}$　（B）$-2+\sqrt{10}$　（C）$-2-\sqrt{6}$　（D）$-2+\sqrt{6}$

【答案】(B)

（9）设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，在$X=x$的条件下，Y在区间$(x,1)$上服从均匀分布，则$\mathrm{cov}(X,Y)=$

（A）$-\frac{1}{36}$　　（B）$-\frac{1}{72}$

（C）$\frac{1}{72}$　　（D）$\frac{1}{36}$

【答案】(D)

（10）设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从参数为 λ 的指数分布，令 $Z=|X-Y|$，则下列与 Z 服从同一分布的是

（A）$X+Y$　　（B）$\frac{X+Y}{2}$　　（C）$2X$　　（D）X

【答案】(D)

二、填空题：11～16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

（11）若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(1+ax^2\right)^{\sin x}-1}{x^3}=6$，则 $a=$

【答案】6

（12）$z=f(u,v)$ 有二阶连续导数，$\mathrm{d}f\big|_{(1,1)}=3\mathrm{d}u+4\mathrm{d}v$，$y=f(\cos x,1+x^2)$，则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$

【答案】5

（13）若函数 $f(x)=x+1$，若 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，$x\in[0,\pi]$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\sin a_{2n-1}=$

【答案】$-\frac{1}{\pi}$

（14）微分方程 $y'=\frac{1}{(x+y)^2}$，满足条件 $y(1)=0$ 的解为

【答案】$x=\tan(y+\frac{\pi}{4})-y$.

（15）设实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a+1 & a\\ a & a\end{pmatrix}$，若对任意实向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$，

$(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})^2\leqslant\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$ 都成立，则 a 的取值范围

【答案】$a\geqslant0$.

（16）随机试验每次成功的概率为p，现进行三次独立重复实验，已知至少成功一次的条件下全部成功的概率为 $\frac{4}{13}$，则 p=

【答案】$\frac{2}{3}$

三、解答题：17～22 小题, 共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分 10 分）已知平面区域 $D=\{(x,y)\big|\sqrt{1-y^2}\le x\le1,\ -1\le y\le1\}$，计算 $\iint\limits_D\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma$.

【答案】$\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})-2$

（18）（本题满分 12 分）设 $f(x,y)=x^3+y^3-(x+y)^2+3$，曲面 $z=f(x,y)$ 在 $(1,1,1)$ 处的切平面为 T，T 与三个坐标面所围有界区域在 xoy 面的投影为 D

（1）求T的方程

（2）求$f(x,y)$在D上的最大值和最小值

【答案】切平面$x+y+z=3$；最大值21，最小值$\frac{17}{27}$

（19）设$f(x)$二阶可导，$f'(0)=f'(0),\left|f''(x)\right|\le 1$，证：

1）$\left|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\right|\le \frac{x(1-x)}{2}$.

2）$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\le \frac{1}{12}$

【答案】1)泰勒公式

2)把1）代入

（20）（本题满分 12 分）已知有向曲线$\boldsymbol{L}$为球面$x^2+y^2+z^2=2x$与平面$2x-z-1=0$的交线从z轴正向往z轴负向看去为逆时针方向，计算曲线积分

$$\int_L (6xyz-yz^2)\mathrm{d}x+2x^2z\mathrm{d}y+xyz\mathrm{d}z$$

【答案】$\frac{4\pi}{5\sqrt{5}}$

（21）（本题满分 12 分）已知数列$\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$满足$x_0=-1,y_0=0,z_0=2,$且$\begin{cases} x_n=-2x_{n-1}+2z_{n-1} \\ y_n=-2y_{n-1}-2z_{n-1} \\ z_n=-6x_{n-1}-3y_{n-1}+3z_{n-1} \end{cases}$，记$\alpha_n=\begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{Bmatrix}$，写出满足$\alpha_n=A\alpha_{n-1}$的矩阵$A$，并求$A^n$及$x_n,y_n,z_n(n=1,2,\cdots)$.

【答案】$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$，$A^n=\begin{pmatrix} -4+(-1)^{n+1}2^n & -2+(-1)^{n+1}2^n & 2 \\ 4+(-1)^n 2^{n+1} & 2+(-1)^n 2^{n+1} & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$,

$x_n=8+(-2)^n,y_n=-8+(-2)^{n+1},z_n=12.$

（22）（本题满分 12 分）设总体$X\sim U(0,\theta)$，θ未知，$X_1,X_2\cdots X_n$为简单随机样本，$X_{(n)}=\max(X_1,X_2\cdots X_n)$，$T_c=cX_{(n)}$.

（1）求c时，使得T_c为θ的无偏估计.

（2）记$h(c)=E(T_c-\theta)^2$，求c使得$h(c)$取最小值.

【答案】（1）$c=\frac{n+1}{n}$；（2）$c=\frac{n+2}{n+1}$.

（2）求正交变换 $x=Qy$, 使 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TBAx$ 为标准形.

【答案】（1） $a=1,b=2$；（2） $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=6y_1^2$.