2025 年全国硕士研究生入学统一考试（数学一）试卷详解

一、选择题：1 ~ 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\sin t\,dt$，$g(x)=\int_0^x e^{t^2}dt\cdot\sin^2 x$，则（　　）

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，也是 $g(x)$ 的极值点

(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，也是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

【答案】 (B)

【解析】

$f'(x)=e^{x^2}\sin x,\ f''(x)=e^{x^2}2x\sin x+e^{x^2}\cos x$

$g'(x)=e^{x^2}\sin^2 x+\int_0^x e^{t^2}dt\cdot 2\sin x\cos x$

$g''(x)=e^{x^2}2x\sin^2 x+e^{x^2}2\sin x\cos x+e^{x^2}2\sin x\cos x+\int_0^x e^{t^2}dt2\cos 2x$

$f'(0)=0,\ f''(0)=1>0\Rightarrow x=0$为$f(x)$ 的极值点，但不是拐点

$g'(0)=0,g''(0)=0$

$g'''(x)=2e^{x^2}\sin^2 x+x\left(2e^{x^2}\sin^2 x\right)'+4\cos 2xe^{x^2}+2\sin 2x\left(e^{x^2}\right)'$

$-4\sin 2x\int_0^x e^{t^2}dt+2\cos 2xe^{x^2}$

$g'''(0)=6>0\Rightarrow x=0$为$g(x)$ 的拐点

（2）已知级数①$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}$，②$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}})$，则（　　）

（A）均条件收敛

（B）条件收敛，绝对收敛

（C）绝对收敛，条件收敛

（D）均绝对收敛

【答案】（B）

【解析】①$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}$　②$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$

对于①　$\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}=(-1)^{n-1}\sin\left(n\pi-\frac{n^3\pi}{n^2+1}\right)$

$$=(-1)^{n-1}\sin\left(n\pi\left(1-\frac{n^2}{n^2+1}\right)\right)$$

$$=(-1)^{n-1}\sin\left(n\pi\cdot\frac{1}{n^2+1}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sin\frac{n\pi}{n^2+1}\right|$$

$$\sin\frac{n\pi}{n^2+1}\sim\frac{n\pi}{n^2+1}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{n^2+1}$发散而$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{n^2+1}\cdot(-1)^{n-1}$收敛

所以级数①条件收敛

对于② $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^{2}}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^{2}}}\right)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt[3]{n^{2}}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^{2}}}\right|$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^{2}}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^{2}}}\sim-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^{2}}}\right)^{3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{n^{2}}$$

所以级数②绝对收敛

(3) 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，则（　　）

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在

(C) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在

(D) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 存在

【答案】 (D)

【解析】 (D) 由广义洛必达，即分母趋于无穷就可以洛必达，极限存在

(4) 设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_{-2}^{2}dx\int_{4-x^{2}}^{4}f(x,y)dy=$（　　）

(A) $\int_0^4[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx]dy$

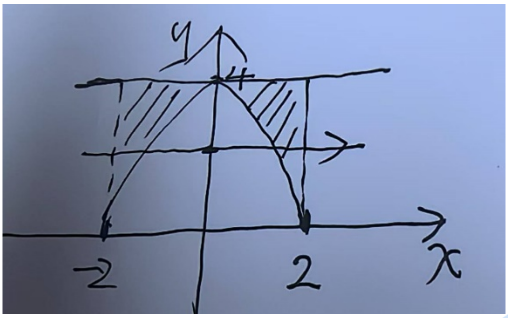
(B) $\int_0^4[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx]dy$

(C) $\int_0^4[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_{2}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)dx]dy$

(D) $2\int_0^4dy\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx$

【答案】（A）

【解析】如图：



原式$=\int_0^4 [\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x,y)dx+\int_{\sqrt{4-y}}^{2} f(x,y)dx]dy$

（5）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 的正惯性指数为（　　）

（A）0　　　　（B）1　　　　（C）2　　　　（D）3

【答案】（B）

【解析】 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$

$=x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2=(x_1+x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2$

（6）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 n 维列向量，向量 α_1,α_2 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关 且

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4=0$ 空间直角坐标系中关于 x，y，z 的方程，$x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3=\alpha_4$

（A）过原点的一个平面　　　　（B）过原点的一条直线

（C）不过原点的一个平面　　　　（D）不过原点的一条直线

【答案】（D）

【解析】由 α_1,α_2 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，又

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4=0$

则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$ 进而 $x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3=0$ 的基础解系向量个数为 1，

又 $x=y=z=0$ 时，　$\alpha_4=0$，此时 $\alpha_1+\alpha_2=0$，与 α_1,α_2 线性无关矛盾，故而不过原点，选（D）.

(7)设 n 阶矩阵 A.B.C 满足 $r(A)+r(B)+r(C)=r(ABC)+2n$ 给出下列四个结论

① $r(ABC)+n=r(AB)+r(C)$　　② $r(AB)+n=r(A)+r(B)$　　③ $r(A)=r(B)=r(C)=n$　　④ $r(AB)=r(BC)=n$

(A) ①②　　(B) ①③　　(C) ②④　　(D) ③④

【答案】（A）

【解析】取 $n=1, A=a\neq 0, B=b\neq 0, c=0$ 满足条件，而③④不对，故选 A.

(8) 设二维随机变量(X,Y)服从正态分布 $N(0,01,1,\rho)$ 其中 $\rho\in(-1,1)$ 若 a,b 为满足 $a^2+b^2=1$ 的任意实数，则 $D(aX+bY)$ 的最大值为（　　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) $1+|\rho|$　　(D) $1+\rho^2$

【答案】（C）

【解析】 $D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY+2ab\rho\sqrt{DX}\sqrt{DY}=a^2+b^2+2ab\rho$

$a^2+b^2=1$，设 $a=\sin t, b=\cos t$，有

$a^2+b^2+2ab\rho=1+\sin 2t\cdot\rho$，最大值选（C）

(9) 设 $X_1,X_2,\cdots X_{20}$ 是来自样本总体 B（1，0.1）的简单随机样本，令 T= $\sum_{i=1}^{20}X_i$

利用泊松分布表示二项分布方法可得 $P\{T\leq 1\}$ =（　　）

(A) $\frac{1}{e^2}$　　(B) $\frac{2}{e^2}$　　(C) $\frac{3}{e^2}$　　(D) $\frac{4}{e^2}$

【答案】（C）

【解析】

由 $X_1,X_2,\ldots,X_{20}$ 来自 B（1，0.1）的简单随机样本

则 T= $\sum_{i=1}^{20} X_i$ ~B(20,0.1)

$$P\{T \le 1\} = P\{T = 0\} + P\{T = 1\}$$
$$= C_{20}^{0}(0.1)^{0}(0.9)^{20} + C_{20}^{1}(0.1)^{1}(0.9)^{19}$$
$$\approx \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} = e^{-2} + 2e^{-2} = 3e^{-2}$$

其中 $\lambda \approx 0.1 \cdot 20 = 2$

(10) 设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu, 2)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ，z_α 表示标准正态分布的上侧 α 分位数，假设检验问题 H_0：$\mu \le 1$，H_1：$\mu > 1$ 时显著性水平为 α ，检验的拒绝域为（　　）

(A) $\left[(x_1, x_2, \ldots, x_n) \middle| \overline{x} > 1 + \frac{2}{n} z_\alpha\right]$ (B) $\left[(x_1, x_2, \ldots, x_n) \middle| \overline{x} > 1 + \frac{\sqrt{2}}{n} z_\alpha\right]$

（C）$\left[(x_1, x_2, \ldots, x_n) \middle| \overline{x} > 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} z_\alpha\right]$ （D）$\left[(x_1, x_2, \ldots, x_n) \middle| \overline{x} > 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} z_\alpha\right]$

【答案】（D）

【解析】记 $T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{2}{n}}}$ ，则有 $P\{T > z_\alpha\} = \alpha$ ，$\frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{2}{n}}} > z_\alpha$ ，即 $\overline{X} > 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} z_\alpha$ ，选（D）

二、填空题：11–16 小题，每小题 5 分，共 30 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(11) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-1}{\ln x\cdot\ln(1-x)}=$________.

【答案】-1

【解析】$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-1}{\ln x\cdot\ln(1-x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{x\ln x}-1}{\ln x\cdot\ln(1-x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\ln x}{\ln x\cdot(-x)}=-1$

(12) 已知 $f(x)=\begin{cases}0,0\le x\le\dfrac{1}{2}\\ x^2,\dfrac{1}{2}\le x\le1\end{cases}$ 的傅里叶级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，$S(x)$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$ 的和函数，则 $S(-\dfrac{7}{2})=$________.

【答案】$\dfrac{1}{8}$

【解析】$S\left(-\dfrac{7}{2}\right)=S\left(\dfrac{1}{2}-4\right)=S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{f\left(\dfrac{1}{2}-0\right)+f\left(\dfrac{1}{2}+0\right)}{2}=\dfrac{0+\dfrac{1}{4}}{2}=\dfrac{1}{8}$

(13) 已知函数 $U(x,y,z)=xy^2z^3$，向量 $n=(2,2,-1)$，则 $\left.\dfrac{\partial v}{\partial n}\right|_{(1,1,1)}=$________.

【答案】1

【解析】$\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2z^3$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xyz^3$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=3xy^2z^2$，

$$\operatorname{grad}u\big|_{(1,1,1)}=\left.\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}\right|_{(1,1,1)}=\{1,2,3\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}=\operatorname{grad}u\big|_{(1,1,1)}\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\{1,2,3\}\cdot\frac{\{2,2,-1\}}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=1$$

（14）已知有向曲线 L 是沿抛物线 $y=1-x^2$ 从点 $(1,0)$ 到 $(-1,0)$ 的段，则曲线积分 $\int_L (y+\cos x)\,dx+(2x+\cos y)\,dy=$________.

【答案】$\frac{4}{3}-2\sin 1$

【解析】补 $L_1: y=0, x:-1\to 1$

$$\int_L (y+\cos x)dx+(2x+\cos y)\,dy$$

$$=\oint_{L+L_1}(y+\cos x)\,dx+(2x+\cos y)\,dy-\int_{L_1}(y+\cos x)dx+(2x+\cos y)\,dy$$

$$\oint_{L+L_1}(y+\cos x)\,dx+(2x+\cos y)\,dy=\iint_D (2-1)\,dxdy=S_D$$

$$=2\int_0^1 1-x^2\,dx=\frac{4}{3}$$

$$\int_{L_1}(y+\cos x)dx+(2x+\cos y)\,dy=\int_{-1}^1 \cos x dx=2\int_0^1 \cos x dx=2\sin 1$$

所以 $\int_L (y+\cos x)\,dx+(2x+\cos y)\,dy=\frac{4}{3}-2\sin 1$

（15）设矩阵 A= $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ a & 3 & -4 \\ b & 5 & -7 \end{pmatrix}$ 若方程组 $A^2x=0$ 与 $Ax=0$ 不同解则 a-b=________.

【答案】—4

【解析】根据题意，$|A|=0$，$|A|=$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ a & 3 & -4 \\ b & 5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ a-b & -2 & 3 \\ b & 5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+a-b & 0 & 0 \\ a-b & -2 & 3 \\ b & 5 & -7 \end{vmatrix} = (4+a-b)(-1)=0$$，故

$a-b=-4$

（16）设 A,B 为两个随机事件，A,B 相互独立 $P(A)=2P(B), P(A\cup B)=\frac{5}{8}$ 则 A,B 至少有一个发生的条件下________.

【答案】

【解析】

三、解答题：17—22 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分 10 分）$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)}dx$

【答案】$\frac{3}{10}\ln 2+\frac{\pi}{10}$

【解析】

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(x^2-2x+2)}dx$$

由于

$$\frac{1}{(1+x)(x^2-2x+2)}=\frac{a}{1+x}+\frac{bx+c}{x^2-2x+2}=\frac{(a+b)x^2+(-2a+b+c)x+2a+c}{(1+x)(x^2-2x+2)},$$

则 $\begin{cases} a+b=0 \\ -2a+b+c=0 \\ 2a+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{5} \\ b=-\dfrac{1}{5} \\ c=\dfrac{3}{5} \end{cases}$.

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(x^2-2x+2)}dx=\int_0^1 \frac{\frac{1}{5}}{1+x}+\frac{-\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}}{(1+x)(x^2-2x+2)}dx$$

$$=\frac{1}{5}\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{5}\int_0^1\frac{x-3}{x^2-2x+2}dx$$

$$=\frac{1}{5}\ln 2-\frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x^2-2x+2}d(x^2-2x+2)-\int_0^1\frac{2}{x^2-2x+2}dx\right]$$

$$=\frac{1}{5}\ln 2-\frac{1}{10}\ln(x^2-2x+2)\Big|_0^1+\frac{2}{5}\int_0^1\frac{1}{(x-1)^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{5}\ln 2-\frac{1}{10}(0-\ln 2)+\frac{2}{5}\arctan(x-1)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{5}\ln 2+\frac{1}{10}\ln 2+\frac{2}{5}\left(0+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{10}\ln 2+\frac{\pi}{10}$$

(18)(本题满分 12 分)函数 $f(u)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有二阶导数,记 $g(x,y)=f(\frac{x}{y})$，若 $g(x,y)$ 满足 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1$，且 $g(x,x)=1$，$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x,x)}=\frac{2}{x}$，求 $f(u)$.

【答案】 $f(u)=-5+6\sqrt{u}-\ln u$

【解析】
$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{1}{y}f'(\frac{x}{y}),\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{1}{y^2}f''(\frac{x}{y}),\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{y^2}f'(\frac{x}{y})-\frac{x}{y^3}f''(\frac{x}{y}),$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f'(\frac{x}{y}),\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}f'(\frac{x}{y})+\frac{x^2}{y^4}f''(\frac{x}{y})$$

代入原方程得：$\frac{2x^2}{y^2}f''(\frac{x}{y})+\frac{x}{y}f'(\frac{x}{y})=1$

令 $\frac{x}{y}=u$ ，则 $2u^2f''(u)+uf'(u)=1$ （欧拉方程）

令 $y=f(u),x=u$ 则方程变为 $2x^2y''+xy'=1$

令 $x=e^t$ ，则方程变为：

$$y''(t)-\frac{1}{2}y'(t)=\frac{1}{2}\Rightarrow y(t)=C_1+C_2e^{\frac{1}{2}t}-t\Rightarrow y(x)=C_1+C_2\sqrt{x}-\ln x\Rightarrow f(u)=C_1+C_2\sqrt{u}-\ln$$

由 $g(x,x)=1,\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x,x)}=\frac{2}{x}\Rightarrow f(1)=1,\ f'(1)=2\Rightarrow C_1=-5,C_2=6$

$\Rightarrow f(u)=-5+6\sqrt{u}-\ln u$

（19）（本题满分 12 分）设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 可导，证明导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单调递增的充分必要条件是：对 (a,b) 内任意 x_1,x_2,x_3 ，当 $x_1<x_2<x_3$ 时，有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

【答案】略

【解析】证明：（1）必要性

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi_1)(x_1<\xi_1<x_2)$$

$$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=f'(\xi_2)(x_2<\xi_2<x_3)$$

由于 $f'(x)$ 在 (a,b) 上单增，且 $\xi_1<\xi_2$,则 $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$ ，进而

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

（2）充分性

对于任意 $c_1<c_2\in(a,b)$ 有 ： $f'(c_1)=\lim\limits_{x\to c_1}\frac{f(x)-f(c_1)}{x-c_1}$ ，$f'(c_2)=\lim\limits_{x\to c_2}\frac{f(x)-f(c_2)}{x-c_2}$.

当 $a<c_1<x<c_2<b$ 时，由 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ 知，

$$\frac{f(c_1)-f(a)}{c_1-a}<\frac{f(x)-f(c_1)}{x-c_1}<\frac{f(c_2)-f(x)}{c_2-x}$$

两边同时取极限及极限的保号性可知:

$$\lim_{x\to c_1^+}\frac{f(x)-f(c_1)}{x-c_1}\le\lim_{x\to c_1^+}\frac{f(c_2)-f(x)}{c_2-x}=\frac{f(c_2)-f(c_1)}{c_2-c_1}$$

$$\lim_{x\to c_2^-}\frac{f(c_2)-f(x)}{c_2-x}\ge\lim_{x\to c_2^-}\frac{f(x)-f(c_1)}{x-c_1}=\frac{f(c_2)-f(c_1)}{c_2-c_1}$$

进而 $f'(c_1)=\lim\limits_{x\to c_1^+}\frac{f(x)-f(c_1)}{x-c_1}\le\lim\limits_{x\to c_2^-}\frac{f(x)-f(c_2)}{x-c_2}=f'(c_2)$ ，即 $f'(x)$ 在 (a,b) 上单增.

（20）（本题满分 12 分）设 Σ 是由直线 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 绕直线 $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$（$t$ 为参数）旋转一周得到的曲面，Σ_1 是 Σ 介于平面 $x+y+z=0$ 与 $x+y+z=1$ 之间部分的外侧，计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma_1} x\,dydz+(y+1)\,dzdx+(z+2)\,dxdy$$

【答案】$\dfrac{2\sqrt{3}}{27}-2$

【解析】取 Σ_2： x+y+z=1 上侧，则有

$$I=\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2} x\,dydz+(y+1)\,dzdx+(z+2)\,dxdy-\iint_{\Sigma_2} x\,dydz+(y+1)\,dzdx+(z+2)\,dxdy$$

$$I=\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2} x\,dydz+(y+1)\,dzdx+(z+2)\,dxdy=\iiint_{\Omega} 1+1+1\,dV=3V_{\Omega}$$

Ω 为底在平面 $\sum_2: x+y+z=1$ 上的圆，顶点为原点的锥体，高 $h=\dfrac{|0+0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

半径 $r=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, V_{\Omega}=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h=\dfrac{1}{3}\pi\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{27}\pi$

$$\iint_{\Sigma_2} xdydz+(y+1)dzdx+(z+2)dxdy$$
$$=\iint_{\Sigma_2}(x\cdot 1+(y+1)\cdot 1+(z+2)\cdot 1)dxdy$$
$$=\iint_{D} x+y+1+2+1-x-ydxdy$$
$$=\iint_{D} 4dxdy=4\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=2$$

故而原式$=\dfrac{2\sqrt{3}}{27}-2$

（21）（本题满分 12 分）设矩阵$\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ -1 & -1 & a\end{pmatrix}$已知 1 是 A 的特征多项式的重根

（1）求 a 的值

（2）求所有满足$\begin{matrix}A^2\alpha=\alpha+2\beta\\ A\alpha=\alpha+\beta\end{matrix}$非零列向量 α， β

【答案】

【解析】

（22）（本题满分 12 分）投保人的损失事件发生时，保险公司的赔付额 Y 与投保人的损失额 X 的关系为

$Y=\begin{cases}0, x\le 0\\ X-100, x>100\end{cases}$，设损失事件发生时，投保人的损失额 X 概率密度为

$$Y=\begin{cases}\dfrac{2\times100^2}{(100+x)^3}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}.$$

(1)求 P{Y>0}及 EY

(2)这种损失事件在一年内发生的次数记为 N 保险公司在一年内就这种损失事件产生次数记为 M.假设 N 服从参数为 8 的泊松分布，在 N=n $(n\geq1)$ 的条件下,M 服的理赔

从二项分布 B(n,p),其中 $p=P(Y>0)$ 求 M 的概率分布.

【答案】 (1) $P\{Y>0\}=\dfrac{1}{4}$； $E(Y)=50$

(2) $P\{M=k\}=\dfrac{e^{-2}2^k}{k!}(k=1,2,3\cdots)$

【解析】 (1) $P\{Y>0\}=P\{Y=X-100\}=P\{X>100\}=\int_{100}^{+\infty}\dfrac{2\times100^2}{(100+x)^3}dx=\dfrac{1}{4}$

$$E(Y)=\int_{100}^{+\infty}(x-100)\frac{2\times100^2}{(100+x)^3}dx=\int_{100}^{+\infty}(x+100-200)\frac{2\times100^2}{(100+x)^3}dx$$

$$=\int_{100}^{+\infty}\frac{2\times100^2}{(100+x)^2}dx-200\times\frac{1}{4}=50$$

(2)

$$P\{M=k\}=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{8^n e^{-8}}{n!}C_n^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{8^n e^{-8}}{n!}\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{e^{-8}}{k!}\left(\frac{1}{4}\right)^k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{8^n}{(n-k)!}\left(\frac{3}{4}\right)^{(n-k)}=\frac{e^{-8}}{k!}\left(\frac{1}{4}\right)^k\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{8^{n+k}}{n!}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$=\frac{e^{-8}2^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{6^n}{n!}=\frac{e^{-8}2^k}{k!}e^6=\frac{e^{-2}2^k}{k!}(k=1,2,3\cdots)$$