2025 年全国硕士研究生入学统一考试（数学三）试卷详解

一、选择题：1 ~ 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）当 $x\to 0^{+}$ 时，下列无穷小量中，与 x 等价的是（　　）

(A) $e^{-\sin x}-1$　　(B) $\sqrt{x+1}-\cos x$

(C) $1-\cos\sqrt{2x}$　　(D) $1-\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

【答案】（C）

【解析】

$A.e^{-\sin x}-1\sim -\sin x\sim -x$

$B.\sqrt{x+1}-\cos x=\sqrt{x+1}-1+1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x$

$C.1-\cos\sqrt{2x}\sim\dfrac{1}{2}(\sqrt{2x})^{2}=x$

$D.1-\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\dfrac{x-\ln(1+x)}{x}\sim\dfrac{1}{2}x$

（2）已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\sin t\,dt$，$g(x)=\int_0^x e^{t^2}dt\cdot\sin x^2$，则（　　）

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，也是 $g(x)$ 的极值点

(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，也是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

【答案】（B）

【解析】

$f'(x)=e^{x^2}\sin x$，$f''(x)=e^{x^2}2x\sin x+e^{x^2}\cos x$

$g'(x)=e^{x^2}\sin^2 x+\int_0^x e^{t^2}dt\cdot 2\sin x\cos x$

$g''(x)=e^{x^2}2x\sin^2 x+e^{x^2}2\sin x\cos x+e^{x^2}2\sin x\cos x+\int_0^x e^{t^2}dt2\cos 2x$

$f'(0)=0$，$f''(0)=1>0\Rightarrow x=0$为$f(x)$的极值点，但不是拐点

$g'(0)=0,g''(0)=0$

$g'''(x)=2e^{x^2}\sin^2 x+x\left(2e^{x^2}\sin^2 x\right)'+4\cos 2xe^{x^2}+2\sin 2x\left(e^{x^2}\right)'$

$-4\sin 2x\int_0^x e^{t^2}dt+2\cos 2xe^{x^2}$

$g'''(0)=6>0\Rightarrow x=0$为$g(x)$的拐点

(3) 已知 k 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{k}{n^2})]$ (　　)

(A) 绝对收敛　　(B) 条件收敛

(C) 发散　　(D) 敛散性与 k 的取值有关

【答案】(B)

【解析】

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 条件收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ 绝对收敛

故而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{k}{n^2})]$ 条件收敛

（4）设函数 $f(x)$ 连续，则 $\int_0^1 dy\int_0^y f(x)dx$ （　　）

（A） $\int_0^1 xf(x)dx$　　（B） $\int_0^1 (1+x)\ f(x)dx$

（C） $\int_0^1 (x-1)\ f(x)dx$　　（D） $\int_0^1 (1-x)\ f(x)dx$

【答案】（D）

【解析】

$$\int_0^1 dy\int_0^y f(x)dx=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)dy=\int_0^1 (1-x)f(x)dx$$

（5） 已知 A 是 $m\times n$ 的矩阵，β 是 m 维非零向量。若 A 有 k 阶非零子式，则

（A）当 k=m 时 $Ax=\beta$ 有解　　（B） 当 k=m 时 $Ax=\beta$ 无解

（C）当 k<m 时 $Ax=\beta$ 有解　　（D）当 k<m 时 $Ax=\beta$ 无解

【答案】（A）

【解析】

k=m 时，$r(A)=r(\overline{A})=m$ 进而 $Ax=\beta$ 有解，A 正确

（6）设 A 为 3 阶矩阵，则 A^3-A^2 可对角化是 A 可对角化的

（A）充分但不必要条件　　（B）必要但不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）即不充分也不必要条件

【答案】（B）

【解析】

若 A 可对角化，则 A^3-A^2 可对角化

（7）设矩阵 A=$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -a\end{pmatrix}$，B=$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & a\end{pmatrix}$若 $f(x,y)=\left|xA+yB\right|$ 是正定二次型，则 a 的取值范围是

（A） $(0,2-\sqrt{3})$　　（B） $(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$

（C） $(2+\sqrt{3},4)$　　（D） $(0,4)$

【答案】（B）

【解析】

$$|xA+yB|=\begin{vmatrix} x+y & 2x \\ -2x+y & -ax+ay \end{vmatrix}$$

$$=(-ax+ay)(x+y)-2x(-2x+y)$$

$$=(4-a)x^2-2xy+ay^2$$

因为 $f(x,y)=|xA+yB|$ 是正定二次型

所以$\begin{pmatrix} 4-a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$正定，即 4-a>0,$\begin{vmatrix} 4-a & -1 \\ -1 & a \end{vmatrix}>0$ 解得 $2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}$

（8）设随机变量 X 服从正态分布 N(-1,1)，Y 服从正态分布 N(1,2),若 X 与 X+2Y 不相关，则 X 与 X-Y 的相关系数为

(A) $\frac{1}{3}$　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) $\frac{3}{4}$

（9）设 $X_1, X_2, \dots, X_{20}$ 是来自样本总体 B（1，0.1）的简单随机样本令 T= $\sum_{i=1}^{20} X_i$ 利用泊松分布表示二项分布方法可得 $P\{T\leq 1\}\approx$

(A) $\frac{1}{e^2}$　　(B) $\frac{2}{e^2}$　　(C) $\frac{3}{e^2}$　　(D) $\frac{4}{e^2}$

【答案】（C）

【解析】

由 $X_1, X_2, \dots, X_{20}$ 来自 B（1，0.1）的简单随机样本

则 T= $\sum_{i=1}^{20} X_i$ ~B(20,0.1)

$P\{T\le 1\}=P\{T=0\}+P\{T=1\}$

$=C_{20}^{0}(0.1)^{0}(0.9)^{20}+C_{20}^{1}(0.1)^{1}(0.9)^{19}$

$\approx\frac{\lambda^{0}}{0!}e^{-\lambda}+\frac{\lambda^{1}}{1!}e^{-\lambda}=e^{-2}+2e^{-2}=3e^{-2}$

其中 $\lambda\approx 0.1\cdot 20=2$

(10) 设总体 X 的均匀分布为 F (x)， $X_1,X_2,\dots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，样本的经验分布函数为 $F_n(x)$，对于给定的 $x(0<F(x)<1),D(F_n(x))=$

(A) $F(x)(1-F(x))$ (B) $(F(X))^2$ (C) $\frac{F(x)(1-F(x))}{n}$ (D) $\frac{(F(X))^2}{n}$

【答案】

二、填空题：11–16 小题，每小题 5 分，共 30 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(11) 设 $g(x)$ 是函数 $f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{3+x}{3-x}$ 的反函数，则曲线 $y=g(x)$ 的渐近线方程为________.

【答案】 $y=3$ 和 $y=-3$

【解析】

$f(x)=y=\frac{1}{2}\ln\frac{3+x}{3-x}$ 解得 $x=\frac{3(e^{2y}-1)}{1+e^{2y}}$ 所以 $g(x)=\frac{3(e^{2x}-1)}{1+e^{2x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=3,\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-3$

所以有水平渐近线 y=3 和 y= -3

(12) 设 $\int_1^{+\infty}\frac{a}{x(2x+a)}dx=\ln 2$，则 $a=$________.

【答案】 2

【解析】

$$\int_1^{+\infty}\frac{a}{x(2x+a)}dx=2\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x+a}\right)dx$$

$$=\ln\left|\frac{2x}{2x+a}\right|\Big|_1^{+\infty}=\ln\left|\frac{2+a}{2}\right|=\ln 2$$

所以 $\left|\frac{2+a}{2}\right|=2$

解得 a=2 或 a= -6 若 a= -6 $\int_1^{+\infty}\frac{-6}{x(2x-6)}dx$ 发散舍去，综上 a=2

(13) 微分方程 $xy'-y+x^2e^x=0$ 满足条件 $y(1)=-e$ 的解为 $y=$________.

【答案】 $-xe^x$

【解析】

$$y'-\frac{1}{x}y=-xe^x$$

$$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int -xe^xe^{\int-\frac{1}{x}dx}+C\right]$$

$$=x(-e^x+C)$$

因为 $y(1)=-e$， $y(1)=-e+C\Rightarrow C=0$

所以 $y=-xe^x$

（14）已知函数 $z=z(x,y)$ 由 $z+\ln z-\int_y^x xe^{-t^2}dt=1$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=$________.

【答案】$\dfrac{1}{8}e^{-2}$

【解析】

$$z+\ln z-x\int_y^x e^{-t^2}dt=1 \quad ①$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\int_y^x e^{-t^2}dt-xe^{-x^2}=0 \quad ②$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{z^2}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-e^{-x^2}-e^{-x^2}+2x^2e^{-x^2}=0 \quad ③$$

将 x=1,y=1 代入①②③中解得

$$z(1,1)=1,\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=\frac{1}{2}e^{-1},\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=\frac{1}{8}e^{-2}$$

（15）已知 $f(x)=\begin{vmatrix}2x+1 & 3 & 2x+1 & 1\\ 2x & -3 & 4x & -2\\ 2x+1 & 2 & 2x+1 & 1\\ 2x & -4 & 4x & -2\end{vmatrix}, g(x)=\begin{vmatrix}2x+1 & 1 & 2x+1 & 3\\ 5x+1 & -2 & 4x & -3\\ 0 & 1 & 2x+1 & 2\\ 2x & -2 & 4x & -4\end{vmatrix}$ 则

方程 f(x)=g(x)的不同根的个数为________.

【答案】2

【解析】

因为 f(x)=g(x)所以 g(x)-f(x)=0

$$f(x)=-\begin{vmatrix}2x+1 & 1 & 2x+1 & 3\\ 2x & -2 & 4x & -3\\ 2x+1 & 1 & 2x+1 & 2\\ 2x & -2 & 4x & -4\end{vmatrix}$$

$$g(x)-f(x)=\begin{vmatrix} 2x+1 & 1 & 2x+1 & 3 \\ 5x+1 & -2 & 4x & -3 \\ 0 & 1 & 2x+1 & 2 \\ 2x & -2 & 4x & -4 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2x+1 & 1 & 2x+1 & 3 \\ 2x & -2 & 4x & -3 \\ 2x+1 & 1 & 2x+1 & 2 \\ 2x & -2 & 4x & -4 \end{vmatrix}$$

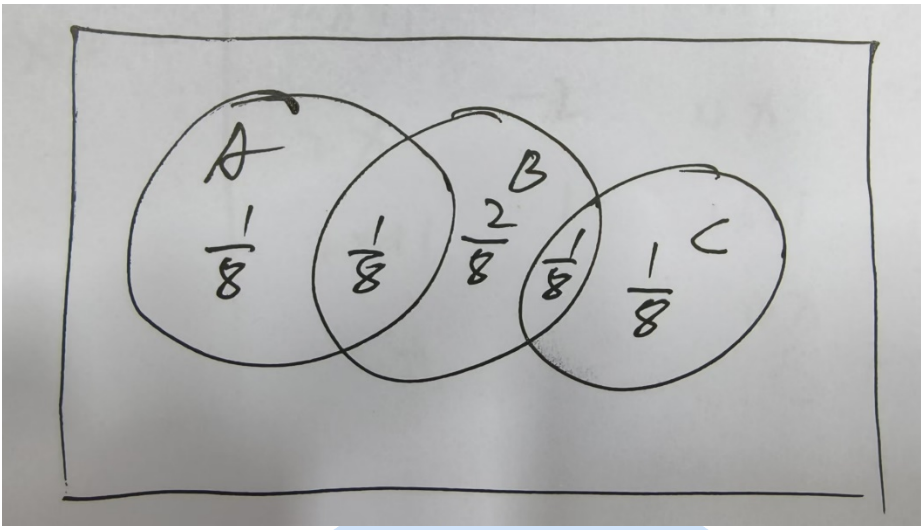
$$=\begin{vmatrix} 4x+2 & 1 & 2x+1 & 3 \\ 7x+1 & -2 & 4x & -3 \\ 2x+1 & 1 & 2x+1 & 2 \\ 4x & -2 & 4x & -4 \end{vmatrix}=-2x(4x+1)=0$$

所以有两个不同的实根。

（16）设 A,B,C 为三个随机事件，且 A 与 B 相互独立，B 与 C 相互独立，A 与 C 互不相容，已知 $P(A)=P(C)=\frac{1}{4}, P(B)=\frac{1}{2}$，则在事件 A,B,C 至少有一个发生的事件下，A,B,C 中恰有一个发生的概率为________.

【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】



$$P=\frac{\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}=\frac{2}{3}$$

三、解答题：17—22 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17)（本题满分 10 分）$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)}dx$

【答案】$\frac{3}{10}\ln 2+\frac{\pi}{10}$

【解析】

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(x^2-2x+2)}dx$$

由于

$$\frac{1}{(1+x)(x^2-2x+2)}=\frac{a}{1+x}+\frac{bx+c}{x^2-2x+2}=\frac{(a+b)x^2+(-2a+b+c)x+2a+c}{(1+x)(x^2-2x+2)},$$

则 $\begin{cases} a+b=0 \\ -2a+b+c=0 \\ 2a+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{5} \\ b=-\dfrac{1}{5} \\ c=\dfrac{3}{5} \end{cases}$.

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(x^2-2x+2)}dx=\int_0^1 \frac{\frac{1}{5}}{1+x}+\frac{-\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}}{(1+x)(x^2-2x+2)}dx$$

$$=\frac{1}{5}\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{5}\int_0^1\frac{x-3}{x^2-2x+2}dx$$

$$=\frac{1}{5}\ln 2-\frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x^2-2x+2}d(x^2-2x+2)-\int_0^1\frac{2}{x^2-2x+2}dx\right]$$

$$=\frac{1}{5}\ln 2-\frac{1}{10}\ln(x^2-2x+2)\Big|_0^1+\frac{2}{5}\int_0^1\frac{1}{(x-1)^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{5}\ln 2-\frac{1}{10}(0-\ln 2)+\frac{2}{5}\arctan(x-1)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{5}\ln 2+\frac{1}{10}\ln 2+\frac{2}{5}\left(0+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{10}\ln 2+\frac{\pi}{10}$$

(18)（本题满分 12 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-e^{2\sin x}+1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}=-3$，证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$

【答案】 $f'(0)=5$

【答案】 $f'(0)=5$

【解析】

$$-3=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-e^{2\sin x}+1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-e^{2\sin x}+1}{\ln(1-x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-e^{2\sin x}+1}{-x^2} \quad ①$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\frac{1-e^{2\sin x}}{x}}{-x}$$

因为 $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2\sin x}}{x}=-2$

由①知 $-3=\lim_{x\to 0}\frac{x\left[f(x)-f(0)\right]+2x-e^{2\sin x}+1}{-x^2}$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{2x-e^{2\sin x}+1}{-x^2}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos xe^{2\sin x}}{-2x}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x(1-e^{2\sin x})}{-x}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+2$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=5$ 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=5$

（19）（本题满分 12 分）已知平面有界区域 $D=\{(x,y)\mid y^2\le x, x^2\le y\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D (x-y+1)^2\,dxdy$

【答案】 $\dfrac{71}{210}$

【解析】

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D (x-y+1)^2\,dxdy &= \frac{1}{2}\iint\limits_D (x-y+1)^2+(y-x+1)^2\,dxdy\\
&= \frac{1}{2}\iint\limits_D (x-y)^2+2(x-y)+1+(y-x)^2+2(y-x)+1dxdy\\
&= \iint\limits_D (x-y)^2+1dxdy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}}(x-y)^2\,dx+\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}}1dx\\
&= \frac{1}{3}\int_0^1\left[(\sqrt{y}-y)^3-(y^2-y)^3\right]dy+\frac{1}{3}\\
&= \frac{1}{3}\int_0^1\left(3y^{\frac{5}{2}}-3y^2+y^{\frac{3}{2}}-y^6+3y^5-3y^4\right)dy+\frac{1}{3}=\frac{71}{210}
\end{aligned}$$

（20）（本题满分 12 分）设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 可导，证明导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单调递增的充分必要条件是：对 (a,b) 内任意 x_1,x_2,x_3，当 $x_1<x_2<x_3$ 时，有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

【答案】略

【解析】证明：（1）必要性

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi_1)(x_1<\xi_1<x_2)$$

$$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=f'(\xi_2)(x_2<\xi_2<x_3)$$

由于 $f'(x)$ 在 (a,b) 上单增，且 $\xi_1<\xi_2$,则 $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$，进而

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

（2）充分性

对于任意 $c_1<c_2\in(a,b)$ 有：$f'(c_1)=\lim\limits_{x\to c_1}\frac{f(x)-f(c_1)}{x-c_1}$，$f'(c_2)=\lim\limits_{x\to c_2}\frac{f(x)-f(c_2)}{x-c_2}$.

当 $a<c_1<x<c_2<b$ 时，由 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ 知，

$$\frac{f(c_1)-f(a)}{c_1-a}<\frac{f(x)-f(c_1)}{x-c_1}<\frac{f(c_2)-f(x)}{c_2-x}$$

两边同时取极限及极限的保号性可知：

$$\lim_{x\to c_1^+}\frac{f(x)-f(c_1)}{x-c_1}\le\lim_{x\to c_1^+}\frac{f(c_2)-f(x)}{c_2-x}=\frac{f(c_2)-f(c_1)}{c_2-c_1}$$

$$\lim_{x\to c_2^-}\frac{f(c_2)-f(x)}{c_2-x}\ge\lim_{x\to c_2^-}\frac{f(x)-f(c_1)}{x-c_1}=\frac{f(c_2)-f(c_1)}{c_2-c_1}$$

进而 $f'(c_1)=\lim\limits_{x\to c_1^+}\dfrac{f(x)-f(c_1)}{x-c_1}\le\lim\limits_{x\to c_2^-}\dfrac{f(x)-f(c_2)}{x-c_2}=f'(c_2)$，即 $f'(x)$ 在 (a,b) 上单增.

（21）（本题满分 12 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&3&0&-1\\-1&0&-2&-a&-1\\1&1&a&2&3\end{pmatrix}$ 的秩为 2.

(1)求 a 的值

(2)求 A 的列向量组的一个极大无关组 α 和 β，并求矩阵 H，使得 A=GH，其中 $G=(\alpha,\beta)$.

【答案】(1) $a=1$；(2) $H=\begin{pmatrix}1&0&2&1&1\\0&1&-1&1&2\end{pmatrix}$

【解析】(1)由 $r(A)=2$ 则 $\begin{vmatrix}1&-1&0\\-1&0&-a\\1&1&2\end{vmatrix}=-2+2a=0\Rightarrow a=1$

(2)

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&3&0&-1\\-1&0&-2&-1&-1\\1&1&1&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3&0&-1\\0&-1&1&-1&-2\\0&2&-2&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3&0&-1\\0&-1&1&-1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则 A 的列向量组的一个极大线性无关组为 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

$$(G,A)=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&3&0&-1\\-1&0&-1&0&-2&-1&-1\\1&1&1&1&1&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&3&0&-1\\0&-1&0&-1&1&-1&-2\\0&2&0&2&-2&2&4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&3&0&-1\\0&1&0&1&-1&1&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&2&1&1\\0&1&0&1&-1&1&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故而，$H=\begin{pmatrix}1&0&2&1&1\\0&1&-1&1&2\end{pmatrix}$

（22）（本题满分 12 分）投保人的损失事件发生时，保险公司的赔付额 Y 与投保人的损失额 X 的关系为 $Y=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ X-100,\ x>100\end{cases}$，设损失事件发生时，投保人的损失额 X 概率密度为

$$Y=\begin{cases}\dfrac{2\times100^2}{(100+x)^3},\ x>0\\ 0,\ x\le 0\end{cases}.$$

(1)求 P{Y>0}及 EY

(2)这种损失事件在一年内发生的次数记为 N 保险公司在一年内就这种损失事件产生次数记为 M.假设 N 服从参数为 8 的泊松分布，在 N=n$(n\ge1)$的条件下,M 服的理赔
从二项分布 B(n,p),其中 $p=P(Y>0)$ 求 M 的概率分布.

【答案】（1）$P\{Y>0\}=\dfrac{1}{4}$； $E(Y)=50$

（2） $P\{M=k\}=\dfrac{e^{-2}2^{k}}{k!}(k=1,2,3\cdots)$

【解析】 （1） $P\{Y>0\}=P\{Y=X-100\}=P\{X>100\}=\int_{100}^{+\infty}\dfrac{2\times100^{2}}{(100+x)^{3}}dx=\dfrac{1}{4}$

$$E(Y)=\int_{100}^{+\infty}(x-100)\frac{2\times100^{2}}{(100+x)^{3}}dx=\int_{100}^{+\infty}(x+100-200)\frac{2\times100^{2}}{(100+x)^{3}}dx$$

$$=\int_{100}^{+\infty}\frac{2\times100^{2}}{(100+x)^{2}}dx-200\times\frac{1}{4}=50$$

(2)

$$P\{M=k\}=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{8^{n}e^{-8}}{n!}C_{n}^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{8^{n}e^{-8}}{n!}\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{e^{-8}}{k!}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{8^{n}}{(n-k)!}\left(\frac{3}{4}\right)^{(n-k)}=\frac{e^{-8}}{k!}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{8^{n+k}}{n!}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$$

$$=\frac{e^{-8}2^{k}}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{6^{n}}{n!}=\frac{e^{-8}2^{k}}{k!}e^{6}=\frac{e^{-2}2^{k}}{k!}(k=1,2,3\cdots)$$