2025 年全国硕士研究生入学统一考试（数学二）试卷解析

一、选择题：1 ~ 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设函数 $z=z(x,y)$ 由 $z+\ln z-\int_y^x xe^{-t^2}dt=0$ 确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ (　　)

(A) $\dfrac{z}{z+1}(e^{-x^2}-e^{-y^2})$　　(B) $\dfrac{z}{z+1}(e^{-x^2}+e^{-y^2})$

(C) $-\dfrac{z}{z+1}(e^{-x^2}-e^{-y^2})$　　(D) $-\dfrac{z}{z+1}(e^{-x^2}+e^{-y^2})$

【答案】 (A)

【解析】原式两边对 x 求导得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}-e^{-x^2}=0$

原式两边对 y 求导得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+e^{-y^2}=0$，

两式相加得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{z+1}(e^{-x^2}-e^{-y^2})$

(2) 已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\sin t\,dt$， $g(x)=\int_0^x e^{t^2}dt\bullet\sin^2 x$，则 (　　)

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，也是 $g(x)$ 的极值点

(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，也是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

【答案】 (B)

【解析】

$f'(x)=e^{x^2}\sin x,\ f''(x)=e^{x^2}2x\sin x+e^{x^2}\cos x$

$g'(x)=e^{x^2}\sin^2 x+\int_0^x e^{t^2}dt\cdot 2\sin x\cos x$

$g''(x)=e^{x^2}2x\sin^2 x+e^{x^2}2\sin x\cos x+e^{x^2}2\sin x\cos x+\int_0^x e^{t^2}dt2\cos 2x$

$f'(0)=0,\ f''(0)=1>0\Rightarrow x=0$为$f(x)$的极值点，但不是拐点

$g'(0)=0, g''(0)=0$

$g'''(x)=2e^{x^2}\sin^2 x+x\left(2e^{x^2}\sin^2 x\right)'+4\cos 2xe^{x^2}+2\sin 2x\left(e^{x^2}\right)'$

$-4\sin 2x\int_0^x e^{t^2}dt+2\cos 2xe^{x^2}$

$g'''(0)=6>0\Rightarrow x=0$为$g(x)$的拐点

(3) 如果对微分方程 $y''-2ay'+(a+2)y=0$ 的任意解 $y(x)$，反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 均收敛，那么 a 的取值范围是（　　）

(A) $(-2,-1]$　　(B) $(-\infty,-1]$

(C) $(-2,0)$　　(D) $(-\infty,0)$

【答案】 (C)

【解析】特征根方程为 $r^2-2ar+(a+2)=0$

$\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 收敛可知 $r<0$，则 $r_1r_2=\dfrac{a+2}{1}>0, r_1+r_2=-\dfrac{-2a}{1}<0$

故 $-2<a<0$

(4) 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $x=0$ 的某去心邻域内有定义且不恒为零，若当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小，则当 $x\to 0$ 时，（　　）

(A) $f(x)+g(x)=o(g(x))$　　(B) $f(x)g(x)=o(f^2(x))$

(C)　$f(x)=o(e^{g(x)}-1)$　　　　　　　　　　(D)　$f(x)=o(g^2(x))$

【答案】（C）

【解析】选项（A）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+g(x)}{g(x)}=0+1=1$

选项（B）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)g(x)}{f^2(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\infty$

选项（C）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{e^{g(x)}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

选项（D）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g^2(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}\bullet\dfrac{1}{g(x)}$ 是未定式

（5）设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_{-2}^{2}dx\int_{4-x^2}^{4}f(x,y)dy=$（　　）

(A) $\int_0^4[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx]dy$

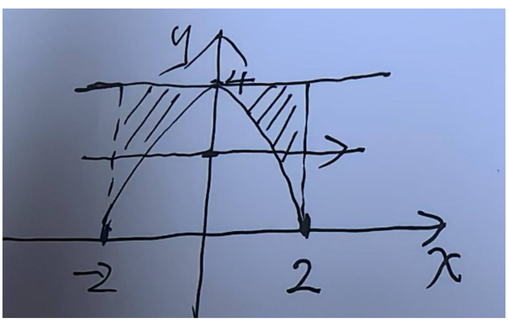
(B) $\int_0^4[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx]dy$

(C) $\int_0^4[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_{2}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)dx]dy$

(D) $2\int_0^4dy\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx$

【答案】（A）

【解析】如图:



原式$=\int_0^4[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x,y)dx+\int_{\sqrt{4-y}}^{2} f(x,y)dx]dy$

（6）设单位质点 P,Q 分别位于点 $(0,0)$ 和 $(0,1)$ 处， P 从点 $(0,0)$ 出发沿 x 轴正向移动，设 G 为引力常量则当质点 P 移动到点 $(l,0)$ 时，克服质点 Q 的引力所做的功为（　　）

(A) $\int_0^1 \frac{G}{x^2+1}dx$　　(B) $\int_0^1 \frac{Gx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx$

(C) $\int_0^1 \frac{G}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx$　　(D) $\int_0^1 \frac{G(x+1)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx$

【答案】 (B)

【解析】 $\overrightarrow{QP}=\{x,-1\}$， $W=\int_0^l \frac{G}{x^2+1}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^l \frac{Gx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx$

（7）设函数 $f(x)$ 连续，给出下列四个条件

① $\lim\limits_{x\to0}\frac{|f(x)|-f(0)}{x}$ 存在；② $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-|f(0)|}{x}$ 存在

③ $\lim\limits_{x\to0}\frac{|f(x)|}{x}$ 存在；④ $\lim\limits_{x\to0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x}$ 存在；

其中能得到“ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导”的条件个数是（　　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

【答案】 (D)

【解析】 ① $\lim\limits_{x\to0}\frac{|f(x)|-f(0)}{x}$ 存在，则分子极限为零；

$f(x)$ 连续，则 $\lim\limits_{x\to0}|f(x)|=|f(0)|$

进而，$|f(0)|=f(0)$，故 $f(0)\ge0$

当 $f(0)>0$ 时，则存在 $x=0$ 的某邻域有 $f(x)>0$，则

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{|f(x)|-f(0)}{x}$ 存在，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导；

当 $f(0)=0$ 时，设 $\lim\limits_{x\to0}\frac{|f(x)|-f(0)}{x}=A$，则有 $\lim\limits_{x\to0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=|A|$

且 $\lim\limits_{x\to0^-}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{|f(x)|}{-x}=-A$，$\lim\limits_{x\to0^+}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{|f(x)|}{x}=A$

故 $-A=A=0$，进而有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，即导数为零，故①正确

② $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-|f(0)|}{x}$ 存在，又 $f(x)$ 连续，故 $f(0)=|f(0)|\geq0$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-|f(0)|}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ 极限存在可导，故②正确

③ $\lim\limits_{x\to0}\frac{|f(x)|}{x}$ 存在设为 A，则有 $\lim\limits_{x\to0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=|A|$ 极限存在

且 $\lim\limits_{x\to0^+}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{|f(x)|}{x}=A$，$\lim\limits_{x\to0^-}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{|f(x)|}{-x}=-A$

故 $A=-A=0$，进而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$ 可导，故③正确

④当 $f(0)>0$ 时，与①一样，

当 $f(0)=0$ 时，与③一样

当 $f(0)<0$ 时，在 $x=0$ 的某邻域有 $f(0)<0$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-|f(x)|+|f(0)|}{x}$，与已知极限差个负号，

故极限存在，可导④正确，综上，选（D）

（8）设矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&0\\2&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ 有一个正特征值和两个负特征值，则

（A）a>4,b>0 （B）a<4,b>0 （C） a>4,b<0 （D）a<4,b<0

【答案】（D）

【解析】由题意，

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = b(a-4) > 0$$

则 $a>4, b>0$，或 $a<4, b<0$

$$\left|\lambda E - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}\right| = (b-\lambda)\left[\lambda^2 - (a-1)\lambda - 4\right]$$

由于 $\lambda^2 - (a-1)\lambda - 4 = 0$ 有两个异号的根，进而 $b<0$，故 $a<4, b<0$

（9）下列矩阵中，可以经过若干初等行变换得到矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的是

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

【答案】（B）

【解析】（B）选项，$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&2&5\\1&1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

（10）设 3 阶矩阵 A,B 满足 $r(AB)=r(BA)+1$，则

（A）方程组(A+B)x=0 只有零解

（B）方程组 Ax=0 与方程组 bx=0 均只有零解

（C）方程组 Ax=0 与方程组 bx=0 没有公共非零解

（D）方程组 ABAx=0 与方程组 BABx=0 有公共非零解

【答案】（D）

【解析】

令 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，则 $AB=\begin{pmatrix}3&3&3\\-3&-3&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$，

$BA=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

满足 $r(AB)=r(BA)+1$，则 $(A+B)x=0$ 有非零解，故 A 错；

由 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 均有非零解，故 B 错；由 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，故 C 错；故选 D.

（11）设 $\int_1^{+\infty}\frac{a}{x(2x+a)}dx=\ln 2$，则 $a=$________.

【答案】2

【解析】

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{a}{x(2x+a)}dx=2\int_{1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x+a}\right)dx$$

$$=\ln\left|\frac{2x}{2x+a}\right|\Bigg|_{1}^{+\infty}=\ln\left|\frac{2+a}{2}\right|=\ln 2$$

所以$\left|\frac{2+a}{2}\right|=2$

解得 $a=2$ 或 $a=-6$ 若 $a=-6$ 则 $\int_{1}^{+\infty}\frac{-6}{x(2x-6)}dx$ 发散舍去，综上 $a=2$

（12）曲线 $y=\sqrt[3]{x^{3}-3x^{2}+1}$ 的渐近线方程是________.

【答案】 $y=x-1$

【解析】

$\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$ 无水平渐近线

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^{3}-3x^{2}+1}-x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{x^{3}-3x^{2}+1}-x)(\sqrt[3]{x^{3}-3x^{2}+1})^{2}+\sqrt[3]{x^{3}-3x^{2}+1}\cdot x+x^{2}}{(\sqrt[3]{x^{3}-3x^{2}+1})^{2}+\sqrt[3]{x^{3}-3x^{2}+1}\cdot x+x^{2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{x^{3}-3x^{2}+1})^{3}-x^{3}}{3x^{2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{3}-3x^{2}+1-x^{3}}{3x^{2}}$$

$$=-1$$

所以有斜渐近线 $y = x - 1$

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}[\ln\frac{1}{n}+2\ln\frac{2}{n}+\cdots+(n-1)\ln\frac{n-1}{n}] =$ ________.

【答案】 $-\frac{1}{4}$

【解析】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}[\ln\frac{1}{n}+2\ln\frac{2}{n}+\cdots+(n-1)\ln\frac{n-1}{n}]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}\ln\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1 x\ln x dx=-\frac{1}{4}$$

(14) 已知函数 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\ln(1+2t) \\ 2t-\int_1^{y+t^2} e^{-u^2}du=0 \end{cases}$ 确定，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} =$ ________.

【答案】 e

【解析】

$t=0$ 代入方程得 $y=1$

$2-e^{-(y+t^2)}\cdot\left(\frac{dy}{dt}+2t\right)=0$ 代入 $t=0$， $y=1$ 得 $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=2e$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=2e$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{2}{1+2t}\right|_{t=0}=2$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=0}=e$$

（15）微分方程$(2y-3x)dx+(2x-5y)dy=0$满足条件$y(1)=1$的解为________.

【答案】$5y^2-4xy+3x^2=4$

【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y-3x}{5y-2x}=\dfrac{2\frac{y}{x}-3}{5\frac{y}{x}-2}$

令$\dfrac{y}{x}=u$带入得$u+x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{2u-3}{5u-2}$，化简为$-\dfrac{5u-2}{5u^2-4u+3}du=\dfrac{1}{x}dx$

两边同时取积分得$5y^2-4xy+3x^2=C$，将$y(1)=1$带入解得$C=4$

则解为$5y^2-4xy+3x^2=4$

（16）设矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性为无关，且$\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3+\alpha_4$，则方程组$Ax=\alpha_1+4\alpha_4$的通解 x=________.

【答案】$x=k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\4\end{pmatrix}$

【解析】

$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3=r(A)$

$Ax=0$的基础解系中有 1 个线性无关的解向量

$(1,1,-1,-1)^T$为$Ax=0$的解

$(1,0,0,4)^T$为$Ax=\alpha_1+4\alpha_4$的解

则通解为 $x=k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\4\end{pmatrix}$

(17) （本题满分 10 分）$\int_0^1\frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)}dx$

【答案】$\frac{3}{10}\ln 2+\frac{\pi}{10}$

【解析】

$$\int_0^1\frac{1}{(1+x)(x^2-2x+2)}dx$$

由于

$$\frac{1}{(1+x)(x^2-2x+2)}=\frac{a}{1+x}+\frac{bx+c}{x^2-2x+2}=\frac{(a+b)x^2+(-2a+b+c)x+2a+c}{(1+x)(x^2-2x+2)},$$

则 $\begin{cases}a+b=0\\-2a+b+c=0\\2a+c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{5}\\b=-\frac{1}{5}\\c=\frac{3}{5}\end{cases}.$

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(x^2-2x+2)}dx = \int_0^1 \frac{\frac{1}{5}}{1+x} + \frac{-\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}}{(1+x)(x^2-2x+2)}dx$$

$$= \frac{1}{5}\ln(1+x)\Big|_0^1 - \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{x-3}{x^2-2x+2}dx$$

$$= \frac{1}{5}\ln 2 - \frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+2}d(x^2-2x+2) - \int_0^1 \frac{2}{x^2-2x+2}dx\right]$$

$$= \frac{1}{5}\ln 2 - \frac{1}{10}\ln(x^2-2x+2)\Big|_0^1 + \frac{2}{5}\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{5}\ln 2 - \frac{1}{10}(0-\ln 2) + \frac{2}{5}\arctan(x-1)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{5}\ln 2 + \frac{1}{10}\ln 2 + \frac{2}{5}\left(0+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{10}\ln 2 + \frac{\pi}{10}$$

（18）（本题满分 12 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)-e^{2\sin x}+1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}=-3$，证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$

【答案】 $f'(0)=5$

【解析】

$$-3 = \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-e^{2\sin x}+1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-e^{2\sin x}+1}{\ln(1-x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-e^{2\sin x}+1}{-x^2} \quad ①$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\frac{1-e^{2\sin x}}{x}}{-x}$$

因为$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2\sin x}}{x}=-2$

由①知 $-3=\lim_{x\to 0}\frac{x\left[f(x)-f(0)\right]+2x-e^{2\sin x}+1}{-x^2}$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{2x-e^{2\sin x}+1}{-x^2}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos xe^{2\sin x}}{-2x}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x(1-e^{2\sin x})}{-x}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+2$$

所以$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=5$ 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=5$

（19）（本题满分 12 分）设函数 $f(x,y)$ 可微且满足 $df(x,y)=-2xe^{-y}dx+e^{-y}(x^2-y-1)dy$，$f(0,0)=2$，求 $f(x,y)$，并求 $f(x,y)$ 的极值.

【答案】 $f(x,y)=-x^2e^{-y}+(y+2)e^{-y}$； $f(0,-1)$ 为极大值

由题意知： $f_x^{'}(x,y)=-2xe^{-y}$， $f_y^{'}(x,y)=e^{-y}(x^2-y-1)$，

故

$$f(x,y)=\int -2xe^{-y}dx=-x^2e^{-y}+C(y)\Rightarrow f_y^{'}(x,y)=x^2e^{-y}+C'(y)=e^{-y}(x^2-y-1),$$

$$C'(y)=-(y+1)e^{-y}\Rightarrow C(y)=(y+2)e^{-y}+C\Rightarrow f(x,y)=-x^2e^{-y}+(y+2)e^{-y}+C$$

因为 $f(0,0)=2\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x,y)=-x^2e^{-y}+(y+2)e^{-y}$

令 $\begin{cases} f_x^{'}(x,y)=-2xe^{-y}=0 \\ f_y^{'}(x,y)=e^{-y}(x^2-y-1)=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$

$$\begin{cases} f_{xx}''(x,y)=-2e^{-y} \\ f_{xy}''(x,y)=2xe^{-y} \\ f_{yy}''(x,y)=-e^{-y}(x^2-y-1)-e^{-y} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A=-2e \\ B=0 \\ C=-e \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} AC-B^2>0 \\ A<0 \end{cases}$$

故极大值为 $f(0,-1)=e$.

(20) (本题满分 12 分) 已知平面有界区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4x, x^2+y^2\le 4y\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D (x-y)^2dxdy$

【答案】 $12\pi-\dfrac{112}{3}$

【解析】

$$\iint_D (x-y)^2 dxdy = 2\iint_{D_1} (x^2+y^2-2xy)dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{4\sin\theta} (r^2-2r^2\cos\theta\sin\theta) rdr$$

$$=128\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^4\theta - 2\cos\theta\sin^5\theta)\, d\theta = 128\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta - \frac{1}{3}\sin^6\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right]$$

$$=128\left[\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)\, d\theta - \frac{1}{24}\right]$$

$$=128\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}-\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt - \frac{1}{24}\right]$$

$$=128\left(\frac{3\pi}{32}-\frac{7}{24}\right) = 12\pi - \frac{112}{3}$$

（21）（本题满分 12 分）设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 可导，证明导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单调递增的充分必要条件是：对 (a,b) 内任意 x_1,x_2,x_3，当 $x_1<x_2<x_3$ 时，有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

【答案】略

【解析】证明：（1）必要性

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi_1)(x_1<\xi_1<x_2)$$

$$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f'(\xi_2)(x_2<\xi_2<x_3)$$

由于 $f'(x)$ 在 (a,b) 上单增，且 $\xi_1<\xi_2$，则 $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$，进而

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

（2）充分性

对于任意 $c_1<c_2\in(a,b)$ 有：$f'(c_1)=\lim\limits_{x\to c_1}\frac{f(x)-f(c_1)}{x-c_1}$，$f'(c_2)=\lim\limits_{x\to c_2}\frac{f(x)-f(c_2)}{x-c_2}$.

当 $a<c_1<x<c_2<b$ 时，由 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ 知，

$$\frac{f(c_1)-f(a)}{c_1-a}<\frac{f(x)-f(c_1)}{x-c_1}<\frac{f(c_2)-f(x)}{c_2-x}$$

两边同时取极限及极限的保号性可知：

$$\lim_{x\to c_1^+}\frac{f(x)-f(c_1)}{x-c_1}\le\lim_{x\to c_1^+}\frac{f(c_2)-f(x)}{c_2-x}=\frac{f(c_2)-f(c_1)}{c_2-c_1}$$

$$\lim_{x\to c_2^-}\frac{f(c_2)-f(x)}{c_2-x}\ge\lim_{x\to c_2^-}\frac{f(x)-f(c_1)}{x-c_1}=\frac{f(c_2)-f(c_1)}{c_2-c_1}$$

进而 $f'(c_1)=\lim\limits_{x\to c_1^+}\frac{f(x)-f(c_1)}{x-c_1}\le\lim\limits_{x\to c_2^-}\frac{f(x)-f(c_2)}{x-c_2}=f'(c_2)$，即 $f'(x)$ 在 (a,b) 上单增.

（22）（本题满分 12 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&1&1\\-2&1&a\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}k&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 合同.

(1)求 a 的值及 k 的取值范围

(2)若存在正交矩阵 Q，使得 $Q^T AQ = B$,求 k 及 Q

【答案】(1) $a = 4, k > 0$；(2) $k = 3$， $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

（1）$\because A$ 与 B 合同，$\therefore \lambda = 0$ 为 A 的一个特征值 $\Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow a = 4$，

由 $|\lambda E - A| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 0 \Rightarrow k > 0$

（2）因为存在正交矩阵 Q ,使得 $Q^T AQ = B \Rightarrow k = 3$

当 $\lambda_1 = 3$ 时，由 $(3E - A)x = 0 \Rightarrow \xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

当 $\lambda_2 = 6$ 时，由 $(6E - A)x = 0 \Rightarrow \xi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

当 $\lambda_3 = 0$ 时，由 $(0E - A)x = 0 \Rightarrow \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

再单位化 ξ_1, ξ_2, ξ_3 可得 $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.